DETERMINANTNING ASOSIY XOSSALARI VA UNI SATR YOKI USTUN BO'YICHA YOYISH USULI

Navoiy Innovatsiyalar Universiteti
katta o'qituvchisi
Abduraxmanov G'ulom Erkinovich

Annotatsiya. Ushbu ishda chiziqli algebra bo'limining markaziy tushunchalaridan biri — determinantning mazmuni, uning fundamental algebraik xossalari hamda satr yoki ustun bo'yicha yoyish (Laplas yoyilishi) usuli chuqur yoritiladi. Determinantning geometriyaviy talqinlari orqali uning matritsa chiziqli o'lchov o'zgarishiga ta'siri, satr va ustunlarda bajariladigan elementar o'zgarishlarga nisbatan qanday munosabatda bo'lishi ilmiy asosda ko'rsatib beriladi. Shuningdek, determinantning linearlik, antisimmmetriklik va ko'paytma bo'yicha invariantlik kabi xossalari misollar yordamida tahlil qilinadi. Ishning ilmiy ahamiyati shundan iboratki, unda satr yoki ustun bo'yicha yoyish usuli berilgan matritsaning determinantini hisoblashda samarali va umumiy algoritm sifatida taqdim etilib, minor va algebraik qo'shiluvchilar orqali determinantning rekursiv tuzilishi izchil ochib beriladi. Mazkur material determinant tushunchasining nazariy asoslarini mustahkamlash bilan birga, amaliy masalalarda, xususan, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda, matritsalar rangi va inversini aniqlashda qo'llanishini kengaytirishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: determinant, matritsa, chiziqli algebra, elementar o'zgarishlar, linearlik xossasi, antisimmmetriklik, Laplas yoyilishi, satr bo'yicha yoyish, ustun bo'yicha yoyish, minor, kofaktor (algebraik qo'shiluvchi), rekursiv hisoblash, geometriyaviy talqin, matritsa inversi, chiziqli tenglamalar sistemasi.

Аннотация. В данной работе подробно рассмотрены одно из центральных понятий линейной алгебры — определитель, его фундаментальные алгебраические свойства, а также метод разложения по строке или столбцу (разложение Лапласа). Через геометрическую интерпретацию определителя раскрывается его влияние на изменение линейных размеров при преобразованиях матриц, а также анализируется поведение определителя при выполнении элементарных операций над строками и столбцами. Особое внимание уделено таким свойствам, как линейность, антисимметричность и инвариантность относительно произведения матриц, что подкрепляется показательными примерами. Научная значимость работы заключается в том, что метод разложения по строке или столбцу представлен как универсальный и эффективный алгоритм вычисления определителя матрицы, где через миноры и алгебраические дополнения раскрывается его рекурсивная структура. Представленный материал способствует углублению теоретического понимания

понятия определителя и расширяет его практическое применение, в частности, при решении систем линейных уравнений, определении ранга и нахождении обратной матрицы.

Ключевые слова: определитель, матрица, линейная алгебра, элементарные преобразования, свойство линейности, антисимметричность, разложение Лапласа, разложение по строке, разложение по столбцу, минор, кофактор (алгебраическое дополнение), рекурсивное вычисление, геометрическая интерпретация, обратная матрица, система линейных уравнений.

Annotation. This work provides a detailed exploration of one of the central concepts in linear algebra — the determinant, its fundamental algebraic properties, and the method of expansion along a row or a column (Laplace expansion). Through the geometric interpretation of the determinant, the study highlights its effect on linear scale transformations of matrices and analyzes its behavior under elementary row and column operations. Special focus is given to essential properties such as linearity, antisymmetry, and invariance under matrix multiplication, supported by illustrative examples. The scientific significance of the work lies in presenting the expansion by row or column as a universal and efficient algorithm for computing a matrix determinant, revealing its recursive structure through minors and cofactors. The presented material strengthens the theoretical understanding of the determinant concept and broadens its practical applications, particularly in solving systems of linear equations, determining matrix rank, and finding the inverse matrix.

Keywords: determinant, matrix, linear algebra, elementary transformations, linearity property, antisymmetry, Laplace expansion, row expansion, column expansion, minor, cofactor, recursive computation, geometric interpretation, inverse matrix, system of linear equations.

Kirish

To‘g‘ri to’rtburchak ko‘rinishidagi sonlar jadvaliga *matritsa* deyiladi. Matritsani belgilashda qavslardan foydalanamiz, masalan,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Matritsani tashkil etuvchi sonlarni uning *elementlari* deyiladi. Matritsa elementlarining gorizontal qatoriga uning *satrlari*, vertikal qatoriga *ustunlari* deyiladi. Agar matritsadagi satrlar soni ustunlar soniga teng bo‘lsa, undagi satrlar soni – *matritsa tartibi* deb ataladi. Umumiy ko’rinishda yozilganda matritsaning elementlari ikkita indeksli bitta harf orqali belgilanib, birinchi indeks satrning tartib raqamini (nomerini), ikkinchi indeks ustun tartib raqamini ifodalaydi. Masalan, n-tartibli A matritsaning umumiy ko’rinishi quyidagicha yoziladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_1^n.$$

Kvadrat matritsaning yuqori chap burchagini quyi o'ng burchagi bilan tutushtiruvchi kesmada yotuvchi elementlar qatori matritsaning *bosh dioganali*, yuqori o'ng burchagini quyi chap burchagi bilan tutashtiruvchi kesmadagi elementlar qatori *yordamchi diagonali* deyiladi.

n-tartibli determinant yoki n>1 da A matritsaning determinanti deb, shu matritsaning elementlaridan quyidagi formula yordamida hosil qilingan songa aytiladi:

$$|A|=\det A=\left|a_{ij}\right|_1^n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum(-1)^{s+t}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}=\sum(-1)^k a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$$

Bunda birinchi to'rtta ifoda determinantning belgtlanishi; birinchi summa o'zaro teng bo'lmagan barcha

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

o'rniga qo'yishlar bo'yicha olinib, bunda s – yuqori satrdagi inversiyalar soni, t – quyi satrdagi inversiyalar soni, ikkinchi summa barcha $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ o'rin almashtirishlar bo'yicha olinib, k -bu o'rin almashtirishdagi inversiyalar soni. Bu ikki summa aynan tengdir. Summalardagi qo'shiluvchilar *determinantning hadlari* deyiladi; determinantning har bir hadi – matritsaning har bir satridan bittadan, har bir ustunidan bittadan olingan n ta elementlar ko'paytmasiga teng bo'lib, agar (*) o'rniga qo'yish juft bo'lsa, bu ko'paytma o'z ishorasi bilan, agar o'rniga qo'yish toq bo'lsa, teskari ishora bilan olinadi. Birinchi tartibli determinant o'zining yagona elementiga teng. n-tartibli determinantning barcha elementlari soni $n!$ ga teng. A matritsaning elementlari, satrlari, ustunlari mos determinantning *elementlari, satrlari, ustunlari* deb ataladi.

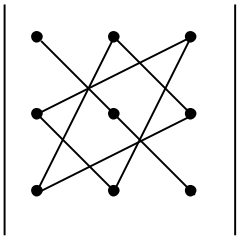
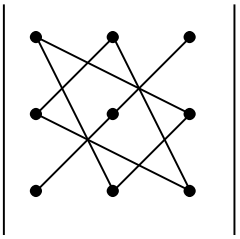
1-m i s o l. Ikkinchi tartibli determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.\blacksquare$$

2-m i s o l. Uchinchi tartibli determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \blacksquare$$

Bu ifoda uchburchaklar qoidasi (*Sarryus qoidasi*) bo‘yicha topiladi. Uni quyidagi jadvallar orqali tasvirlash mumkin bo’lib, bir xil ishora bilan bitta ko’paytmada ishtirok etuvchi elementlar kesmalar bilan birlashtirilib ko’rsatilgandir:

\+  - 

Matritsa (yoki determinantlar) ning barcha satrlarini mos ustunlar bilan almashtirishga *transponirlash* deyiladi. Demak, berilgan matritsaning satrlari transponirlangan matritsaning o‘sha tartibda yozilgan ustunlaridan iborat, va aksincha.

Kvadrat matritsa (yoki determinant) bo‘lgan holda transponirlash matritsani (yoki determinantni) bosh dioganal atrofida 180^0 burishdan iborat bo’ladi.

Bir nechta bir xil uzunlikdagi satrlar yig‘indisi deganda, har bir elementi berilgan satrlardan mos elemantlar yig’indisidan iborat satrga aytiladi. *Satrni songa ko’paytirish* deganda quyidagi satr tushuniladiki, uning har bir elementi shu songa ko’paytirishdan hosil bo‘ladi.

Bir xil uzunlikdagi satrlarning *chiziqli kombinasiyasi* deb, berilgan satrlarni *chiziqli kombinasiya koeffisiyentlari* deb ataluvchi sonlarga ko’paytmalarining yig’indisiga aytiladi.

Agar biror satr boshqalarining chiziqli kombinasiyasidan iborat bo‘lsa, u holda berilgan satr bu satrlar orqali *chiziqli bog’langan* deyiladi. Agar bir xil uzunlikdagi satrlarning hyech biri qolganlari orqali chiziqli bog‘lanishda bo‘lmasa, bunday satrlar *chiziqli bog‘lanmagan* deyiladi.

Masalan, (-1, -7, 5, -3)=2(1, -1, -2, -3)-3 (1, 2, -3, -1) tenglik birinchi satr qoligan ikki satrning chiziqli kombinasiyasidan iborat ekanligini ko’rsatadi.

1. Determinantda hamma satrlar mos ustunlar qilib yozilsa, ya’ni transponirlanganda, determinatning qiymati o‘zgarmaydi.
2. Determinantning biror satridagi (yoki biror ustunidagi) barcha elementlar nolga teng bo‘lsa, bunday determinant nolga teng bo’ladi.
3. Determinantda istalgan ikki satrni (yoki ikki ustunni) o‘zaro almashtirsak, determinantning faqat ishorasi o‘zgaradi.
4. Ikki satri (yoki ikki ustuni) teng bo’lgan determinant nolga tengdir.
5. Determinantning biror satridagi (yoki ustunidagi) barcha elementlarni aynan bitta songa ko‘paytirilsa, u holda determinant ham shu songa ko‘paytiriladi. Boshqacha

aytganda, satrdagi (yoki ustundagi) barcha elementlarning umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisi ostidan chiqarish mumkin.

6. Biror satridagi barcha elementlari boshqa bir satrining mos elementlariga proporsional bo'lgan determinant nolga tengdir. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o'rinli.

7. Agar determinantni *i*-chi satridagi barcha elementlar *k* ta qo'shiluvchidan iborat bo'lsa, u holda bu determinantni *k* ta determinantlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lib, bunda ularning *i*-chidan farqli barcha satrlari berilgan deteminantdagidek, *i*-satri esa birinchi determinantda birinchi qo'shiluvchilardan ikkinchisida -ikkinchilaridan va h.k. tuzilgandir. Xuddi shunday, ustunlar uchun ham o'rinlidir. Xususiy holda bitta satrga boshqa bir satrni (ustunni) qo'shish (yoki undan ayirish) mumkin.

8. Agar determinantning hech bo'lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli bog'langan bo'lsa, bu determinant nolga tengdir. Aksincha, agar *n*-tartibli $(n \geq 2)$ determinant nolga teng bo'lsa, u holda uning hech bo'lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo'ladi. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o'rinlidir.

3-m i s o l. Quyidagi ko'paytmalardan qaysi birlari mos tartibli determinantga kiradi:

a) $a_{33}\,a_{16}\,a_{72}\,a_{27}\,a_{55}\,a_{61}\,a_{44}$; v) $a_{27}\,a_{36}\,a_{51}\,a_{74}\,a_{25}\,a_{43}\,a_{62}$.

Yechish. a) bu ko'paytma yettinchi tartibli determinantga kiradi, chunki u har bir satr va har bir ustundan bittadan olib tuzilgan yettita elementning ko'paytmasidan iborat. Uning ishorasini aniqlash uchun berilgan ko'paytmadagi indekslardan o'rniga qo'yishni tuzib uning juft-toqligini aniqlaymiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (16)(27)(3)(4)(5).$$

Dekrement 2 ga teng bo'lganligi sababli, bu o'rniga qo'yish juft, demak, ko'paytma plyus ishora bilan kiradi.

v) bu ko'paytma birinchi satrdagi elementni saqlamagani uchun determinantga kirmaydi. ■

4-m i s o l. *i* va *k* larni $a_{47}\,a_{63}a_{1i}\,a_{55}\,a_{7k}a_{24}\,a_{31}$ ko'paytma 7-tartibli determinantga plyus ishorasi bilan kiradigan qilib tanlang.

Yechish. Berilgan ko'paytmaning 7-tartibli determinantga plyus ishorasi bilan qatnashishi uchun ko'paytuvchilarning indekslaridan tuzilgan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & k \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yish juft bo'lishi zarur. Bu o'rniga qo'yish $i=6$, $k=2$ bo'lganda juft bo'ladi. Darhaqiqat, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (163)(247)(5)$ o'rniga qo'yishning dekrementi 4 ga teng bo'lganligi sababli juftdir. ■

5-m i s o l. *n* tartibli determinantning birinchi ustunini oxiriga qo‘yib, qolgan ustunlarni esa joylashish tartibini saqlagan holda chap tomonga siljitsak, determinant qanday o’zgaradi?

Yechish. Agar determinantda birinchi va ikkinchi ustunlarni, so‘ng ikkinchi va uchinchi ustunlarni, va h.k. (*n*-1)-chi va *n*-chi ustunlar o‘rinlarini almashtirib qo‘ysak, natijada masala shartidagi almashtirishni hosil qilamiz. Hammasi bo‘lib determinant ustunlarining (*n*-1) ta almashtirishini bajargan bo’lamiz. Demak, determinant $(-1)^{n-1}$ ga ko’paytirilgan bo‘ladi. ■

6-m i s o l. Bosh dioganalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari qo‘shma kompleks sonlardan iborat determinant haqiqiy sondan iboratligini ko’rsating.

Yechish. Faraz etaylik, determinant $d = a + b_i$ bo’lsin. *d* da transpozitsiya bajarib, mos elementlari *d* determinantning elementlariga qo’shma bo’lgan d^1 determinantni hosil qilamiz. Determinant o’zining elementlari ko’paytmalarining (ma’lum ishoralar bilan olingan) yig‘indisiga teng bo‘lganligi sababli, va bir nechta kompleks sonlarning yig’indisi va ko’paytmasiga qo‘shma bo’lgan kompleks sonlarning xossasiga ko‘ra: $d^1 = a - b_i$ bo’ladi. $d = d^1$ bo‘lganligi sababli, $a + b_i = a - b_i$ tenglik bajariladi.

Bundan $b = 0$ ni va $d = a$ - haqiqiy son ekanligini ko‘ramiz. ■

7-m i s o l. Bosh dioganalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari faqat ishora bilangina farq qilsa, ya’ni barcha *i* va *k* larda $a_{ik}=-a_{ki}$ shart bajarilsa, u holda bunday determinant *kososimmetrik* deyiladi. Toq tartibli kososimmetrik determinant nolga teng bo’lishini ko’rsating.

Yechish. *d* determinantning har bir satridan (-1) ko‘paytuvchini chiqarsak, transpozitsiyalashgan *d* ga teng bo‘lgan determinantni hosil qilamiz, ya’ni $d = (-1)^n d$. *n* toq bo’lganligi sababli $d = 0$ ni hosil qilamiz. ■

8-m i s o l. 24026, 40262, 02624, 26240, 62402 41 ga bo‘linadi.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$ determinant 41 ga bo‘linishini isbotlang.

Yechish. Oxirgi ustunga 10000 ga ko‘paytirilgan birinchi ustunni, 1000 ga ko’paytirilgan ikkinchi, 100 ga ko’paytirilgan uchinchi, 10 ga ko‘paytirilgan to’rtinchi ustunni 41 soniga bo‘linadigan 24026, 40262, 02624, 26240, 62402 sonlardan tuzilagan determinantni hosil qilamiz. Demak, berilgan determinant 41 ga bo’linadi. ■

n-tartibli (n≥2) d determinantning a_{ij} elementining M_{ij} minori deb, *d* determinantning a_{ij} elementi turgan satr va ustunni o‘chirishdan keyin qolgan *n-1* tartibli determinantga aytiladi.

a_{ij} elementning algebraik to’ldiruvchisi deb $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$ ga aytiladi.

Agar determinantning biror satr (ustun) elementlarini ularning algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib yig‘sak, shu determinantga teng bo’ladi. Xususiy holda, agar satrda (yoki ustunda) bitta elementdan boshqa barchasi nolga teng bo‘lsa, u holda determinant shu elementning uni algebraik to‘ldiruvchisiga ko‘paytmasiga teng bo’ladi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

determinantda a_{23} element minori

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

ga teng bo‘lib, uning algebraik to‘ldiruvchisi $A_{23} = -M_{23}$.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Leng S. Algebra. M. Mir, 1968.
2. Kostrikin A.I. Vvedeniye v algebru. M., 1977, 495 str.
3. Leng S. Algebra. M. Mir, 1968.
4. Narzullayev U.X., Soleyev A.S. Algebra i teoriya chisel. I-II chast, Samarkand,
5. Faddeyev D.K., Sominskiy I.S. Sbornik zadach po vysshey algebre. M., Nauka, 1977.
6. B.L. Van der Varden. Algebra. M., Nauka, 1976
7. Sbornik zadach po algebre pod redaksiyey. A.I. Kostrikina, M., Nauka, 1985.
8. Xojiyev J., Faynleb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, «O’zbekiston», 2001.
9. 2002Faddeyev D.K. Leksii po algebre. M., Nauka, 1984, 415 st.