DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH

Djurayeva Ra’no Kayumovna
Toshkent To‘qimachilik va yengil sanoat instituti akademik litseyi Matematika fani o’qituvchisi

Annotatsiya: Differensial tenglamalarni yechish mavzusi matematika fanini o‘rganinsh jarayonida muhim o‘rin tutadi. Ushbu maqolada Differensial tenglamalarni yechish mavzusining o‘quvchilarning mantiqiy tafakkurini rivojlantirishdagi roli va uni hayotiy masalalar bilan bog‘lagan holda o‘rgatish metodlari muhokama qilingan. Differensial tenglamalarni yechishni o‘rganish nafaqat nazariy bilimlarni, balki amaliy ko‘nikmalarni ham rivojlantirishga imkon beradi. Maqolada matematika fanini zamonaviy ta`lim texnologiyalari asosida o`qitish jarayonini takomillashtirish hamda talabalarda differensial tenglamalar haqida dastlabki tushunchalarni to`g`ri tasavvur qilish va anglash, mantiqiy tahlil qilish kompetensiyalarini shakllantirishga oid misol va masalalar qaralgan.

Kalit so‘zlar: Differensial tenglama, yechim, integral, umumiy yechim, xususiy yechim, hosila, differensial, erkli o'zgaruvchi (argument), noma'lum funksiya, boshlang'ich shartlar, integrallash

Аннотация: Тема решения дифференциальных уравнений играет важную роль в процессе изучения математики. В данной статье рассматривается роль темы решения дифференциальных уравнений в развитии логического мышления учащихся и методы его обучения в связи с жизненными проблемами. Изучение решения дифференциальных уравнений позволяет развивать не только теоретические знания, но и практические навыки. В статье рассматриваются примеры и вопросы, связанные с совершенствованием процесса обучения математике на основе современных образовательных технологий и формированием компетенций учащихся в правильном представлении и понимании исходных понятий дифференциальных уравнений и логического анализа**.**

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, решение, интеграл, общее решение, частное решение, производная, дифференциал, произвольная переменная (аргумент), неизвестная функция, начальные условия, интегрирование

KIRISH

Differensial tenglamalar matematikaning muhim bir bo‘limi bo‘lib, u tabiatdagi, fizikadagi, muhandislikdagi va hattoki iqtisodiyotdagi o‘zgarishlarni tasvirlash uchun ishlatiladi. Litsey o‘quvchilari uchun bu mavzu dastlab qiyin tuyulishi mumkin, lekin

aslida u oddiy qoidalar va amaliyotga asoslanadi. Ushbu qo‘llanma differensial tenglamalarni tushunarli, qiziqarli va oson o‘rganishga yordam berish uchun maxsus ishlab chiqildi. Biz eng sodda (birinchi tartibli) differensial tenglamalarni yechishni o‘rganamiz, chunki ular matematikaning asosiy tushunchalarini tushunish uchun eng yaxshi boshlang‘ich nuqta hisoblanadi.

Isaak Nyuton (1643–1727, Angliya) va U(1646–1716, Germaniya) mustaqil ravishda hisob(analiz) ilmini yaratdilar. Shu bilan birga differensial tenglamalar haqida dastlabki tushunchalar ham shakllandi. Nyuton harakat qonunlarini o‘rganishda oddiy differensial tenglamalardan foydalangan. Leonard Eyler (1707–1783) differensial tenglamalarni chuqur o‘rgandi va ularni sistematik tahlil qila boshladi. Logranj va Laplas ham bu sohani rivojlantirishda katta hissa qo‘shdilar. Bu davrda oddiy differensial tenglamalarning asosiy turlari (masalan, birinchi tartibli va chiziqli tenglamalar) o‘rganildi. Furye– issiqlik tenglamalari orqali differensial tenglamalarni fizikada qo‘llay boshladi. Koshi va Riman kabi matematiklar nazariyani chuqurlashtirdilar. Oddiy differensial tenglamalarning umumiy yechim usullari ishlab chiqildi. Kompyuter texnologiyalari rivojlanishi bilan raqamli usullar (raqamli yechimlar) paydo bo‘ldi. Oddiy va xususiy differensial tenglamalar nafaqat nazariy, balki amaliy sohalarda (muqobil energiya, kosmik parvozlar, biologik modeling) keng qo‘llanilmoqda. Differensial tenglamalar — matematikada o‘zgaruvchilarning o‘zgarish sur'atini ifodalovchi tenglamalardir. Bu maqolada eng sodda differensial tenglamalar, ularni yechish usullari, va ularning amaliy qo‘llanilishini ko‘rib chiqamiz.

Differensial tenglama tushunchasi

Matematikaning ko‘pgina tatbiqiy masalalari o‘rganilayotgan jarayonlarni ifodalovchi noma’lum funksiyalar va ularning hosilalarini bog‘lovchi munosabatlarga keladi. Bunday munosabatlarni ifodalovchi tenglamalar differensial tenglamalar deyiladi. Agar bunday tenglamadagi noma’lum funksiya bir argumentli bo‘lsa, tenglamani oddiy differensial tenglama deb ataymiz. Differensial tenglama — bu funksiya va uning hosilalari orasidagi munosabatni ifodalovchi tenglama. Ular ko‘pincha tabiat va texnika sohalarida uchraydi, masalan, aholi sonining o‘sishi, issiqlik tarqalishi, elektromagnit maydonlar va boshqalar. Umuman, fizika, texnika, biologiya, kimyo, tibbiyot va iqtisodiyotning ko‘pgina amaliy masalalari

$$y'(t) = k \times y(t) \quad (1)$$

differensial tenglamani qanoatlantiruvchi y(t) funksiyani topishga keladi, bu yerda k – berilgan biror o‘zgarmas son. (1) tenglamaning yechimlari esa $y(t) = ce^{kx}$ ko‘rinishdagi har qanday funksiyadan iborat ekanligini ko‘rish qiyin emas. c o‘zgarmas ixtiyoriy son, shunga ko‘ra (1) differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko‘p.

Differensial tenglamaning **yechimi** deb, shu tenglamaga qo‘yilganda uni ayniyatga aylantiruvchi ixtiyoriy funksiyaga aytiladi. Yechimning grafigi

tenglamaning **integral egri chizig‘i** deyiladi. Eng sodda differensial tenglamalar quyidagilardir:

- Birinchi tartibli differensial tenglamalar
- Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Mavzuning amaliy va nazariy ahamiyati:

Nazariy ahamiyati:

1. **Matematik metodlarni o‘rganish va rivojlantirish.** Soddalashtirilgan differensial tenglamalar asosiy yechim usullarini o‘rganish uchun yaxshi boshlang‘ich nuqtadir. Ular o‘quvchilar va tadqiqotchilar uchun diferensial tenglamalarni yechishning asosiy vositalari, masalan, o‘zgaruvchilari ajraladigan usul, homogen tenglamalar, chiziqli differensial tenglamalar va hokazolarni tushunish uchun kerakli asoslarni beradi.

2. **Jahon tizimlarini tushunish.** Eng sodda tenglamalar, masalan, eksponensial o‘sish va kamayish yoki oddiy garmonik osillyatsiyalar, fizik tizimlar va tabiiy jarayonlar haqida ko‘plab muhim tushunchalarni anglash imkonini beradi. Bunday tenglamalar orqali asosiy dinamikalarning xususiyatlarini, masalan, barqarorlik va muvozanatni o‘rganish mumkin.

3. **Teorematik tadqiqotlar.** Differensial tenglamalar nazariyasida sodda tenglamalarni o‘rganish ko'plab murakkab masalalarga umumiy yondashuvlarni ishlab chiqishga yordam beradi. Bu sohada sodda tenglamalarni yechish usullari (masalan, analitik yoki sonli metodlar) nazariy tadqiqotlar uchun asos bo‘ladi va murakkabroq modellarni yechishda qo‘llaniladi.

Amaliy ahamiyati:

Tabiat va texnologiya jarayonlarini modellashtirish. Eng sodda differensial tenglamalar tabiiy va texnik jarayonlarni matematik modellashtirishda ishlatiladi. Masalan:

- **Populyatsiya o‘sishi:** Eksponensial o‘sish yoki kamayish differensial tenglamalari, biologik tizimlar, populatsiyalar yoki viruslarning yoyilishi kabi jarayonlarni modellashtirishda qo‘llaniladi.
- **Termodinamik jarayonlar:** Termodinamika yoki issiqlik o‘tkazuvchanligi kabi fizik jarayonlar oddiy differensial tenglamalar bilan ifodalanadi.
- **Elektrik tarmoqlar:** Elektr zanjirlaridagi oddiy differensial tenglamalar (masalan, LC zanjiri) orqali elektr signalining tarqalishi modellashtiriladi.

Muhandislik va sanoat ilovalari. Soddalashtirilgan differensial tenglamalar muhandislik sohalarida, masalan, mexanikada (garmonik osillyatorlar), elektronika (signal o‘tkazish), avtomatika (sistemaning boshqaruv tizimlari) va boshqa sohalarda keng qo‘llaniladi. Bu tenglamalar tizimlarning ishlashini optimallashtirish, barqarorligini tekshirish va ularning samaradorligini oshirish uchun ishlatiladi.

Moliyaviy modellar. Moliyaviy jarayonlar ham ko‘pincha differensial tenglamalar yordamida modellashadi. Misol uchun, moliya bozorlaridagi aktivlarning narxi va daromadlarining o‘zgarishi odatda differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi, bu esa investitsiyalarni boshqarish va xavfni tahlil qilishda muhim vosita bo‘ladi.

Tibbiy modellar. Biologiyada va tibbiyotda ham differensial tenglamalar qo‘llaniladi. Masalan, viruslarning tarqalishini o‘rganishda, kasalliklarning epidemiologik modelini yaratishda va organizmning fiziologik jarayonlarini (masalan, qon aylanishi yoki asab tizimi faoliyati) tahlil qilishda sodda differensial tenglamalar yordamida ilgari suriladi. Eng sodda differensial tenglamalarni yechish amaliy va nazariy jihatdan juda muhim. Ular matematik va ilmiy modellarni qurishda, tabiat va texnologiya jarayonlarini tushunishda, hamda murakkab tizimlarni boshqarishda asosan ishlatiladi. Shu bilan birga, bunday tenglamalarni o‘rganish orqali murakkabroq masalalarga yondashuvlarni rivojlantirish mumkin.

Asosiy qo‘llaniladigan metodlar haqida umumiy ma’lumot

Asosiy differensial tenglamalarni yechish uchun bir nechta metodlar mavjud. Bu metodlar turli xil tenglamalarning turiga, murakkabligiga va matematik modelga qarab tanlanadi. Quyida eng ko‘p qo‘llaniladigan metodlarni ko‘rib chiqamiz:

O‘zgaruvchilarni ajratish metodi. Bu metod o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar uchun ishlatiladi.

Xarakteristik tenglama metodi. Bu metod chiziqli birinchi tartibdagi differensial tenglamalar uchun ishlatiladi.

Chiziqli differensial tenglamalar (Chiziqli differensial tenglama metodlari).

Raqamli metodlar. Ba’zi hollarda differensial tenglamalarni analitik ravishda yechish qiyin bo‘ladi. Shunday hollarda sonli (raqamli) metodlardan foydalanish kerak bo‘ladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Birinchi tartibli differensial tenglamalar eng oddiy differensial tenglama turidir. Quyidagi usullarni ko‘rib chiqamiz:

a) Ajratish usuli

Bu usul differensial tenglama ajratilishi mumkin bo‘lgan holatlar uchun qo‘llaniladi. Tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi: $\frac{dy}{dx}=g(x)f(y)$

Bu yerda g(x) va f(y) faqat mos ravishda x va y ga bog‘langan funksiyalardir. Tenglamani ajratamiz va ikkala tomonni integrallaymiz:

Tenglamani ajratamiz: $\frac{1}{f(y)}dy=g(x)dx$

Har ikki tomonni integrallaymiz: $\int \frac{1}{f(y)}dy=\int g(x)dx$ va natijada, yechimga erishamiz.

1-misol: Tenglamani yeching: $\frac{dy}{dx}=y\cdot x$

Yechish. Ajratamiz: $\frac{1}{y}dy=xdx$

Ikkala tomonni integrallaymiz: $\int\frac{1}{y}dy=\int xdx$

Natijada: $\ln|y|=\frac{x^2}{2}+C$.

Shuning uchun umumiy yechim: $y=C_1e^{\frac{x^2}{2}}$. Bu yerda $C_1=e^C$ bo'lib, C - cheksiz kichik doimiy.

Bir jinsli differensial tenglamalar.

Bir jinsli differensial tenglama deganda, tenglamaning o‘ng tomoni nolga teng bo‘lgan differensial tenglama tushuniladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi (boshlang'ich yechim) shartlar bilan bog‘liq bo‘lgan umumiy yechim va maxsus yechimdan iborat. Agar bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o‘ng tomoni biror funksiya bo‘lsa, uning yechimi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va shu bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning maxsus yechimi yig‘indisidan iborat bo'ladi.

Bir jinsli differensial tenglama — bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar turiga kiradi. Ushbu tenglamalar

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ko'rinishida bo‘ladi, ya’ni bu tenglamada y va x ning nisbati faqat bir funktsiya shaklida ifodalangan. Bunday tenglamalarni yechishda, o‘zgaruvchilarni ajratish va maxsus o‘zgarishlar yordamida soddalashtirish mumkin.

2-misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping:

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2\,dy = 0;$$

Yechish. $(y^2 - 2xy)dx + x^2\,dy = 0$ tengiama tarkibidagi $P = y^2 - 2xy$, $Q = x^2$ funksiyalar ikkalasi ham ikkinchi tartibli bir jinsii funksiyalar bo’lgani uchun bu tengiama bir jinsii tengiama bo’iadi. Shuning uchun $y=xu$ almashtirishni qo’llaymiz. U holda $dy=xdu+udx$ va tenglama $x^2(u^2 -2u)dx + x^2(xdu + udx) =0$ yoki $(u^2 - u)dx + xdu = 0$ ko’rinishda bo‘ladi. O’zgaruvchilami ajratamiz:

$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u(1-u)}$ va hosil qilingan tenglamani integrallaymiz: $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{u(1-u)}$

O’ng tomondagi integralni topamiz:

$$\int\frac{du}{u(1-u)}=\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{1-u}=$$

$$=ln|u|-ln|1-u|+lnC=ln\left|\frac{Cu}{1-u}\right|.$$

Topilgan ifodani (4)ga qo'ysak, $ln|x| = ln\left|\frac{Cu}{1-u}\right|$, yani $x = \frac{Cu}{1-u}$ yoki $u = \frac{x}{C+x}$ ga ega bo'lamiz. So'ngi ifodadagi и o'rmiga $\frac{y}{x}$ ni qo'yib, $y = \frac{x^2}{C+x}$umumiy yechimni topamiz.

Javob: $y = \frac{x^2}{C+x}$.

3- Misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping:

2(x + y)dy + (3л + 3y - \)dx = 0;

Yechish. Berilgan tenglamani $\frac{dx}{dy} = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y}$ ko'rinishda yozib olamiz.

$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$ bo'lgani uchun 3x+3y = t almashtirishni amalga oshiramiz. U holda $\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}$; 2t(t′ –3)= –9t+9; 2tt′=6t–9t+9; 2tt′=–3t+9

O'zgaruvchilami ajratamiz: $\frac{2t}{-3t+9}dt = dx$; $\frac{t}{t-3}dt = -\frac{3}{2}dx$

Oxirgi tenglamani integrallaymiz: $\int\left(1 + \frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx$;

$$t + 3ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Endi y va x larga qaytamiz:

$$2x + 2y + 2\ln|3(x + y - 1)| = -x + C_2$$
$$<=> 3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x + y - 1| = C_2 <=>$$
$$<=> 3x + 2y + 2\ln|x + y - 1| = C.$$

Javob: 3x + 2y + 2ln|x + y – 1| = C.

Chiziqli birinchi tartibli tenglamalar.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar – bu $y'+p(x)y=q(x)$

ko'rinishidagi differensial tenglamalardir, ular y' ni o'z ichiga olgan birinchi tartibli hosilaga ega va p(x)y hamda $q(x)$ ga nisbatan chiziqli bo'ladi. Ularni yechish uchun integrallovchi ko'paytuvchi (yoki integrallovchi omil) usulidan foydalaniladi, bunda tenglamani $e\int p(x)dx$ ga ko'paytirib, $(e\int p(x)dxy)'=e\int p(x)dxq(x)$ shakliga keltiriladi, keyin har ikki taraf integrallanadi.Chiziqli birinchi tartibli differensial tenglamalar — bu differensial tenglamalar turining eng sodda va ko'p uchraydigan ko'rinishlaridan biridir. Ular quyidagi umumiy ko'rinishga ega:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Bu yerda:

- y — noma'lum funksiyadir,
- P(x) va Q(x) — berilgan funksiyalar (odatda, uzluksiz),
- $\frac{dy}{dx}$ — y funksiyaning hosilasi.

4-misol. Tenglamani yeching: $\frac{dy}{dx} + 2y = 3x$

Yechish. Integratsiyalash faktori: I(x)=$e^{\int 2dx} = e^{2x}$.

Tenglamani e^{2x} ga ko'paytiramiz: $e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 3xe^{2x}$

Bu tenglamaning chap tomoni quyidagi shaklga keltiriladi: $\frac{d(e^{2x}y)}{dx} = 3xe^{2x}$

Endi integrallaymiz: $e^{2x}y = \int 3xe^{2x}dx$

Bu integralni hisoblash orqali umumiy yechimni topamiz:

$$\int 3xe^{2x}dx = e^{2x}\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + C$$

$$e^{2x}y = e^{2x}\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + C$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + Ce^{-2x}$$

Javob: $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + Ce^{-2x}$.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar ko‘plab fizik va mexanik muammolarni yechishda uchraydi. Ularning umumiy ko‘rinishi quyidagicha:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

Bu yerda p(x), q(x), va g(x) — berilgan funksiyalar.

5-misol. Tenglamani yeching: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

Yechish. Bu tenglama chiziqli va o‘zgaruvchilarni o‘zaro bog‘liq bo‘lgan ikkinchi tartibli differensial tenglamadir. Uni hal qilish uchun xususiy echimni topamiz: $r^2-4r+4=0$

Xarakteristik tenglamani yechish: Bu kvadrat tenglama: $r^2-4r+4=0$

Ushbu tenglamaning ildizlari: r=2 ga teng. Ildizlar bir xil bo‘lgani uchun umumiy echim quyidagicha bo‘ladi: y(x)=$(C_1+C_2x)\,e^{2x}$

Bu yerda C_1 va C_2 - chegaraviy shartlarga bog‘liq bo‘lgan doimiylar.

Chegaraviy shartlarni qo‘llash (agar mavjud bo‘lsa):

Agar chegaraviy shartlar berilgan bo‘lsa, C_1 va C_2 ni aniqlash mumkin. Shunday qilib, bu masalani yechgan holda, umumiy echimni olish mumkin. Agar qo‘shimcha shartlar berilsa, yechim aniq bo‘ladi.

Qadamlar:

1. **Xarakteristik tenglama tuzish**:
2. Tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzish uchun tenglamaning
3. Tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzish uchun tenglamaning

o‘zgaruvchilarini quyidagi shaklda qabul qilamiz:

Yechimlarni tekshirish

Har doim yechimni tekshirib ko‘rish muhim, chunki ba’zan hisoblashlar xatoga olib kelishi mumkin. Yechimni asli tenglamaga qo‘yib, uni tekshiring. Agar tenglama to‘g‘ri bajarilsa, yechim to‘g‘ri hisoblanadi.

Kompyuter yordamida yechimlar

Ko‘pincha, matematik modellarni yechish uchun kompyuter dasturlaridan foydalanish zarur bo‘ladi. Quyidagi dasturiy ta’minotlar juda foydali:

- **Matlab**: Asosan chizish, raqamli hisoblash va tasviriy yechimlar uchun ishlatiladi.
- **Mathematica**: Simbolik hisoblashlar va differensial tenglamalar bilan ishlashda juda qulay.
- **Python**: NumPy, SciPy va SymPy kutubxonalari yordamida raqamli va analitik yechimlar oson topiladi.

Masalan: scipy.integrate.solve_ivp() funktsiyasi yordamida boshlang‘ich shartlar bilan yechimlar topiladi.

Xulosa

Differensial tenglamalar real dunyoda keng qo‘llaniladi. Differensial tenglamalar tabiat va fanlarning dinamik jarayonlarini tasvirlash uchun juda muhimdir; ular fizika, mexanika, biologiya, iqtisodiyot, tibbiyot, geologiya (yer qimirlashini bashorat qilish, konlarni qidirish) kabi sohalarda o'zgaruvchan tizimlarning (harakat, o'sish, issiqlik tarqalishi, to'lqinlar) qonuniyatlarini modellashtirishga yordam beradi, optimal yechimlarni topishda, sunami xavfini baholashda va texnologik muammolarni hal qilishda asosiy vosita hisoblanadi. Qisqacha aytganda, differensial tenglamalar "o'zgarishlarning tili" bo'lib, ular dunyomizni tushunish va boshqarishda hal qiluvchi rol o'ynaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. M.S. Salohiddinov, F.N. Nasritdinov – Oddiy differensial tenglamalar, 1994
2. Sharipov, R.A. Differensial tenglamalarga kirish.Toshkent: O‘qituvchi, 1999.
3. Kamenskiy, M.I. Differensial tenglamalar nazariyasi. Moskva: Vysshaya Shkola, 1983.
4. Dilmurodov N. – “Oddiy differensial tenglamalar” Toshkent ,Sano-Standard,1991
5. Turg‘unbayeva N. – “Differensial tenglamalar kursidan masalalar to‘plami”,2007 Amaliy misollar va masalalar to‘plami.
6. Oppoqov Y. P., Turg‘unov N., Gafarov I. A. –“Oddiy differensial tenglamalardan misol va masalalar to‘plami”, Toshkent, 2009
7. Shokirov I. – “Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar nazariyasi”, 2015.
8. D.Q. Turdiyev – “Xususiy hosilali differensial tenglamalar” ,2019.
9. D.M. Maxmudova, I.Q. Xaydarov, A.R. Qutlimurotov, N.Y. Toshboyeva – “Differensial tenglamalar” ,2022.
10. G’ulomov, N., Mirzayev, S. va boshqalar. “Differensial tenglamalar”. Toshkent: O‘zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2006.